第一讲：分式的概念和性质

**一、课程目标**

1.了解分式、最简分式和最简公分母的概念

2.掌握确定分式有（无）意义的条件

3.理解分式的基本性质，并能利用基本性质对分式进行通分或约分

**二、课程内容**

**知识点一 分式的概念**

**分式的概念：**一般地，如果A，B表示两个整式，并且B中含有字母，那么式子 叫做分式．

**分式成立的三要素：**①形如 的式子 ②A，B均为整式 ③分母B中含有字母

**注意**：分式是两个整式相除的商，分子就是被除式，分母就是除式，而分数线可以理解为除号，还兼有括号的作用．如：（*x*+1）÷（*x*+2），它只表示一种除法运算，而不能称之为分式

**题型一 分式的识别**

**例1-1** 在 、 、 、 、 中分式的个数有（　　）

A．2个 B．3个 C．4个 D．5个

【思路分析】根据分式的定义对上式逐个进行判断，得出正确答案．

【解】分式有： ，  ，有两个，

故选A．

**配套练习 1-1** 下列各式中，分式的个数为（　　）

 ；

A．5个 B．4个 C．3个 D．2个

【思路分析】判断分式的依据是分式的定义，主要是看代数式的分母中是否含有字母，如果含有字母则是分式，如果不含有字母则不是分式．分式不含等号．

【解】  ，  ，  *x*+*y*，的分母中均不含有字母，因此它们是整式，而不是分式．

 含有等号，不是分式．

 ，﹣ ，  分母中含有字母，因此是分式．

故选C．

【总结提示】本题考查了分式的定义：如果A、B表示两个整式，并且B中含有字母，那么式子 叫做分式，A叫做分式的分子，B叫做分式的分母．注意分式不含等号，也不含不等号．

**知识点二 分式的意义与分式的值**

1．分式有意义、无意义的条件：

有意义的条件：分母不等于零；无意义的条件：分母等于零．

2．分式值为0的条件

当分式的分子等于0且分母不等于0时，分式的值为0.

注意：“分母不为零”这个条件不能少．

**题型一 分式有意义、无意义的条件**

**例2-1** 若分式 有意义，则*x*的取值范围是（　　）

A．*x*＞3 B．*x*＜3 C．*x*≠3 D．*x*=3

【思路分析】分式有意义的条件是分母不为0．

【解】∵分式 有意义，

∴*x*﹣3≠0，

∴*x*≠3；

故选：C．

【总结提示】本题考查的是分式有意义的条件：当分母不为0时，分式有意义．

**配套练习2-1**  如果分式 没有意义，那么*x*的取值范围是（　　）

A．*x*≠0 B．*x*=0 C．*x*≠1 D．*x*=1

【思路分析】先根据分式 没有意义的条件列出关于*x*的方程，求出*x*的取值即可．

【解】由题意，得*x*﹣1=0，

解得*x*=1，

故选：D．

【总结提示】本题考查的是分式无意义的条件，熟知分式有、无意义的条件是解答此题的关键．

**题型二 分式的值为0**

**例2-2** 若分式 的值为零，则*x*的值是（　　）

A．1 B．﹣1 C．±1 D．2

【思路分析】直接利用分式的值为零，则分子为零，分母不为零，进而得出答案．

【解】∵分式的值为零， ∴*x*=±1，又因为分母不为0，所以*x*=1

故选A

【总结提示】本题考查是的是分式有意义和分式值为0的条件，掌握分式有意义的条件是分母不等于零、分式值为零的条件是分子等于零且分母不等于零．

**配套练习2-2** 当*x*取什么值时，分式 ．（1）没有意义？（2）有意义？（3）值为零？

【思路分析】（1）根据分式没意义的条件列出关于*x*的方程，求出*x*的值即可；

（2）根据分式有意义的条件列出关于*x*的不等式，求出*x*的取值范围即可；

（3）根据分式的值为0的条件列出关于*x*的不等式组，求出*x*的取值范围即可．

【解】（1）∵分式没意义，

∴*x*﹣1=0，解得*x*=1；

（2）∵分式有意义，

∴*x*﹣1≠0，即*x*≠1；

（3）∵分式的值为0，

∴ ，解得*x*=﹣2．

【总结提示】本题考查的是分式的值为0的条件，熟知分式值为零的条件是分子等于零且分母不等于零是解答此题的关键．

**知识点三 分式的基本性质**

**分式基本性质：**分式的分子与分母同乘（或除以）一个不等于0的整式，分式的值不变.

**注意：**同乘（或除以）一个不等于0的数或者整式

字母表示：

**分式中的符号法则：**分子、分母、分式本身同时改变两处的符号，分式的值不变

字母表示：****

**题型一 利用分式的基本性质判定等式成立的条件**

**例3-1** 下列三个等式 ，  ，  中成立的有（　　）

A．0个 B．1个 C．2个 D．3个

【思路分析】根据分式的基本性质得出：分式本身的符号、分子的符号、分母的符号改变其中的两个，分式的值不变，根据以上性质进行变形即可．

【解】∵，

∴ = 错误；

∵= =﹣ ，

∴=﹣正确；

∵= = ，

∴= 正确；

成立的有2个．

故选C．

【总结提示】本题考查了分式的基本性质和分式的符号法则的应用，注意：①分式本身的符号、分子的符号、分母的符号改变其中的两个，分式的值不变；②改变其中的一个，和原分式互为相反数，题目比较典型，但是一道比较容易出错的题目．

**配套练习3-1** 利用分式的基本性质将 变换正确的是（　　）

A．  B． 

C．  D． 

【思路分析】首先根据分式的有意义的条件判定*x*≠0，然后由分式的基本性质将分子、分母同时除以*x*即可．

【解】∵，即*x*（*x*﹣2）≠0，

∴*x*≠0且*x*≠2；

∴ = = ；

故选A．

【总结提示】本题考查了分式的基本性质：分式的分子、分母同时乘以（或除以）同一个不为0的数或代数式，分式的值不变．解题时，不要忽略分母不为0这一隐含条件．

**题型二 利用分式的性质补全等式变式的缺项**

**例3-3**  （*x*+*y*≠0）  =

 = ．

【思路分析】利用分式的基本性质，分式分子分母同时乘以*x*+*y*即可．

【解】  = = ．

 = ，

 = ，

【总结提示】此题考查了分式的基本性质，熟练掌握分式的基本性质是解本题的关键．

**配套练习3-3**   = ，  = ，  = ．

【思路分析】根据分式的基本性质即可求出答案．

【解】  ，

 = ，

 = =

故答案为：*a*2+*ab*，*x*，*a*+2

【总结提示】本题考查分式的基本性质，解题的关键是熟练运用分式的基本性质，本题属于基础题型．

**题型四 利用分式的性质变形**

**例3-4** 不改变分式的值，使下列分式的分子与分母的最高次项的系数是正数．

（1） ；

（2） ．

【思路分析】（1）先将分母按字母*a*进行降幂排列，添上带负号的括号，再根据分式的符号法则，将分母的负号提到分式本身的前边；

（2）先将分子、分母均按字母*y*进行降幂排列，并且都添上带负号的括号，再根据分式的基本性质，将分子、分母都乘以﹣1．

【解】（1） = = ；

（2） = = ．

【总结提示】本题考查了分式的基本性质及分式的符号法则，解题的关键是正确运用分式的基本性质．

规律总结：

（1）同类分式中操作可总结成口诀：“一排二添三变”，

“一排”即按同一个字母的降幂排列；

“二添”是把第一项系数为负号的分子或分母添上带负号的括号；

“三变”是按分式符号法则把分子与分母的负号提到分式本身的前边．

（2）分式的分子、分母及本身的符号，任意改变其中的两个，分式的值不变．

**配套练习3-4**  不改变分式的值,把下列各式的分子与分母中各项的系数都化为整数.  
(1);(2) .

解:(1) .  
(2) .

**知识点四 分式的约分及最简分式**

**1.约分：**约去分式的分子与分母的公因式，不改变分式的值，这样的分式变形叫做分式的约分．

**2.最简分式：**分子与分母没有公因式的分式，叫做最简分式.

**注意：**①分子、分母必须是整式

②分子、分母没有公因式

**题型一 约分**

约分:(1)  ;(2) . (3) ;

解:(1) = = .

(2) =- =- .

(3) ;

**配套练习4-1** 约分

(1) ;   
(2) ;  
(3) ;  
(4) .

解:(1) ;  
(2) ;  
(3) ;  
(4) .

.

**题型二 最简分式的判定**

**例4-2** 有下列分式：① ，② ，③ ，④ ，其中，最简分式的个数是（　　）

A．1 B．2 C．3 D．4

【思路分析】最简分式的标准是分子，分母中不含有公因式，不能再约分．判断的方法是把分子、分母分解因式，再约分，即可得出①②④不是最简分式，③是最简分式．

【解】① = ；

② = = ；

③ 的分子、分母都不能再分解，且不能约分，是最简分式；

④  ==*y*﹣*x*；

最简分式有1个．

故选：A．

【总结提示】本题考查了最简分式，分式的化简过程，首先要把分子分母分解因式，互为相反数的因式是比较易忽视的问题，在解题中一定要引起注意．

**配套练习 4-2** 下列分式中是最简分式的是（　 　）

A．  B．  C． D． 

【思路分析】将选项中的式子进行化简，然后不能化简的选项即是所求答案．

【解】∵ ，  ，  ，  ，

∴选项中的最简分式是 ，

故选D．

【总结提示】本题考查最简分式，解题的关键是明确最简分式的定义，即不能再化简的分式．

**知识点五 分式的通分**

**通分的定义：**把几个异分母的分式分别化为与原来的分式相等的同分母的分式，这样的分式变形叫做分式的通分．

通分的关键是确定**最简公分母**．

确定**最简公分母的方法：**

①最简公分母的系数取各分母系数的最小公倍数．

②最简公分母的字母因式取各分母所有字母的最高次幂的积．

**题型一 最简公分母**

**例5-1**  ，﹣ ，  的最简公分母是　　．

【思路分析】确定最简公分母的方法是：

（1）取各分母系数的最小公倍数；

（2）凡单独出现的字母连同它的指数作为最简公分母的一个因式；

（3）同底数幂取次数最高的，得到的因式的积就是最简公分母．

【解】分式 ，﹣ ，  的分母分别是2*a*、3*b*2，4*a*2*b*，故最简公分母是12*a*2*b*2．

故答案为12*a*2*b*2

【总结提示】本题考查了最简公分母的定义及求法．通常取各分母系数的最小公倍数与字母因式的最高次幂的积作公分母，这样的公分母叫做最简公分母．

一般方法：①如果各分母都是单项式，那么最简公分母就是各系数的最小公倍数，相同字母的最高次幂，所有不同字母都写在积里．②如果各分母都是多项式，就可以将各个分母因式分解，取各分母数字系数的最小公倍数，凡出现的字母（或含字母的整式）为底数的幂的因式都要取最高次幂．

**配套练习5-1** 写出下列各组分式的最简公分母：  ，  ， 

【思路分析】根据最简公分母的确定方法解答．

【解】  ，  ，  的最简公分母是2*x*（*x*+3）（*x*﹣3），

故答案为：2*x*（*x*+3）（*x*﹣3）．

【总结提示】本题考查的是最简公分母的概念，取各分母系数的最小公倍数与字母因式的最高次幂的积作公分母，这样的公分母叫做最简公分母．

**题型二 利用分式的通分方法进行单项式的通分**

**例5-2** 通分：  ；

【解】  = ，  = ；

**配套练习5-2**  ，  与 ；

【解】  = ，  = ，  = ；

**题型三 利用分式的通分方法进行多项式的通分**

**例5-3** 通分：  ，  ，  ．

【思路分析】确定最简公分母，通分即可．

【解】  = ，

 = ，

 =﹣ =﹣ ．

【总结提示】本题主要考查了通分，解题的关键是确定最简公分母．

**配套练习 5-3** 通分： ， ， ．

【思路分析】先对原式的分子分母分解因式，然后找出几个分式的最简公分母，然后通分即可解答本题．

【解】∵= ，

=，

=，

∴， ，的最简公分母是12*x*（*x*+2）（*x*﹣2）2，

∴== ，

==，

==．

【总结提示】本题考查通分，解题的关键是找出几个分式的最简公分母．

**（拓展题） 利用设比值巧求分式的值**

**例5-4** 已知 = = ≠0，求分式 的值．

【思路分析】设已知等式等于*k*，表示出*x*，*y*，*z*，代入原式计算即可得到结果．

【解】设===*k*，可得*x*=2*k*，*y*=3*k*，*z*=4*k*，

则原式= =．

【总结提示】此题考查了分式的化简求值，熟练掌握运算法则是解本题的关键．

【提出问题】已知==，求分式 的值．

【分析问题】本题已知条件是连等式，因此可用设参法．即设出参数*k*，得出*x*，*y*，*z*与*k*的关系，然后再代入待求的分式化简．

【解决问题】设===*k*，则*x*=　　*k*，*y*=　　*k*，*z*=　　*k*，将它们分别代入，得=　==﹣．

（1）将空白处补充完整．

【应用问题】

（2）已知 = = ，求分式 的值．

【思路分析】（1）分别用*k*表示出其他三个字母，代入代数式求的数值即可；

（2）利用类比的方法设===*k*，进一步用*k*表示出其他三个字母，代入代数式求的数值即可．

【解】（1）设===*k*，则*x*=2*k*，*y*=3*k*，*z*=4*k*，

将它们分别代入，

得=  = =﹣；

（2）设===*k*，则*x*=3*k*，*y*=2*k*，*z*=﹣5*k*，

代入得= = =33．

【总结提示】此题考查分式的化简求值，设出参数，利用一个字母表示其它个数，进一步代入求得数值即可．

**（拓展题） 利用分式的基本性质求使分式的值为正整数的条件**

**例5-5** 已知分式 的值为正整数，求整数*x*的值．

【思路分析】由题意得9﹣*x*2≠0，*x*≠±3，原式可化为 ，由于*x*是整数，所以3﹣*x*为整数，要使为正整数，那么3﹣*x*只能取6的正整数约数1，2，3，6，这样就可以求得相应*x*的值．

【解】由题意可知3﹣*x*为6的正整数约数，

所以3﹣*x*=1，2，3，6；

∴由3﹣*x*=1，得*x*=2；

由3﹣*x*=2，得*x*=1；

由3﹣*x*=3，得*x*=0；

由3﹣*x*=6，得*x*=﹣3（∵*x*≠±3，舍去）．

∴*x*为0，1，2，共3个．

【总结提示】认真审题，抓住关键的字眼，是正确解题的出路．如本题“整数*x*”中的“整数”，“的值为正整数”中的“正整数”．

**三、课程总结**

学霸秘籍：

**四、家庭作业**

**作业1：**定制个性化习题15道

**作业2：**李老师发布的自定义习题